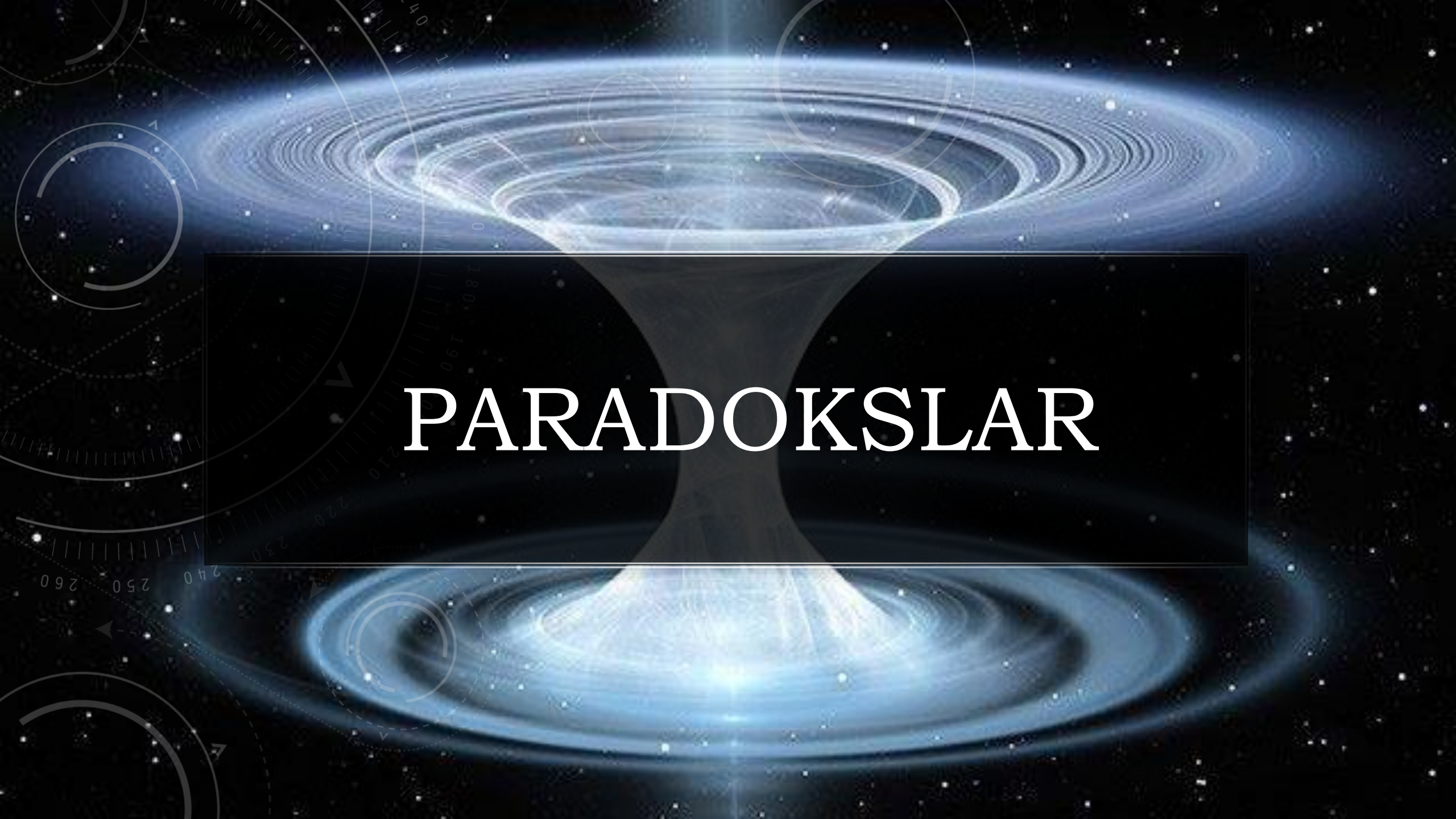




PARADOKSLAR

PARADOKS NEDİR?

- **Paradoks**, görünüşte doğru olan bir ifade veya ifadeler topluluğunun bir çelişki oluşturmaması veya sezgiye karşı bir sonuç oluşturmamasıdır. Çoğunlukla, çelişkili görünen sonuç veya sonuçların aslında çelişkili tarafları vardır. Paradoks teriminin karşılığı olarak Türkçe'de *yanıltmaç*, *çatışkı* ve *çelişki* sözcükleri kullanılmaktadır.
- **Paradoks: 1-**Kökleşmiş inançlara aykırı olan düşünce, aykırı kanı. **2-** Kimi zaman şaşırtma amacı güden, aykırı duygu ve düşünce. Eşanlamalı (anlamdaş): karşıtlam.

GİRİŞ:

- A, “B cümlesi doğrudur” cümlesi olsun • B, “A cümlesi yanlıştır” cümlesi olsun. O zaman A yanlış olmalı, çünkü doğru ise, o zaman B doğrudur, ama B’ye göre A yanlıştır.
- Bununla beraber, benzer şekilde, A doğru olmalı, çünkü yanlış ise, o zaman B yanlıştır, ama B’ye göre A yanlıştır, ve bu durumda A doğrudur. Böylece bir paradoks çıkar.

MATEMATİK PARADOKSLARI

- **DOĞRU PARÇASI PARADOKSU:**

- Önce doğru parçasının tarifini yapalım:

Doğru Parçası: Başlangıcı ve sonu olan ve sonsuz adet noktadan oluşan doğru. Öyleyse nokta nedir?

Nokta: Kalemin kağıda bıraktığı en küçük iz veya belirti. Malûmdur ki noktanın boyutu yoktur. **O halde dikkat. Paradoks başlıyor:**

- Noktanın boyutu olmadığına göre iki noktanın yan yana gelmesi bir şey ifade etmez. 100 nokta veya 1 milyar nokta da yan yana geldiğinde herhangi bir şekil oluşturmaz. (Çünkü şekil oluşturma için gerekli olan boyut özelliğini sağlamıyor) Bu şuna benzer ki; sıfır ile sıfırın toplamı yine sıfırdır. Milyarlarca sıfırı toptasak 'yarım' dahi etmez. O halde doğrunun tanımında bir hata var. Çünkü sonsuz adet noktanın yan yana gelmesi bir şey ifade etmez! Noktanın çok çok az da olsa boyutu olduğunu kabul etmemiz gerekir. Bu sefer de noktanın tarifi hatalı olur.
- Noktayı boyutlu kabul edelim. **Karşımıza bir paradoks daha çıkar;** doğru parçasında sonsuz adet nokta olduğuna göre doğru parçasının da uzunluğu sonsuz olmalıdır. Çünkü çok az da olsa boyutu olan bir şeyden sonsuz adedi yanyana gelirse sonsuz uzunluk olur.

YALANCI PARADOKSU ÖRNEĞİ :

- Tekrar **paradoks**, kökleşmiş inançlara aykırı olan düşüncedir.
- **Kökleşmiş inanç:** Her cümle ya doğru ya yanlıştır.
- **Karşıt örnekler:** • “Gidelim.” • “Buyurun.” • “Ne güzel!” • “Saat kaç?” Anlamına göre bir cümle (1) bildirme, (2) istek, (3) buyurma, (4) koşul, (5) ünlem, veya (6) soru cümlesi olabilir.
- **Düzeltilmiş inanç:** Her bildirme veya koşul cümlesi, ya doğru ya yanlıştır.
- **Karşıt örnekler:**
 - “Bu cümle yanlıştır.”
 - Yukarıdaki A ve B cümleleri.
- **Paradoks 1.** Bazi bildirme cümleleri ne doğru ne yanlıştır.

YÜKLEM PARADOKSU:

- Bir bildirme cümlesi, özne ve yüklem öğelerinden oluşur. Örneğin;

			ÖZNE		YÜKLEM			
			İnce'nin o bankadaki parası		bir milyondan fazladır.			
			İnce'nin		o bankada parası var.			
			İnce'nin o bankadaki parası		var.			

Bir cümlenin öznesi, bir öbek olabilir, mesela

“O bankada parası var” dört sözcükten oluşur.

Aşağıdaki C cümlesi doğrudur, ama kanıtlanamaz.

“Kendi öznesi olduğu zaman kanıtlanamaz” kendi öznesi olduğu zaman kanıtlanamaz.

Zira C'ye göre bir cümle kanıtlanamaz. O halde C yanlış ise, o cümle kanıtlanabilir. Hangi cümle kanıtlanabilir? Kendisi! Yani

- Yüklemi “kendi öznesi olduğu zamanda kanıtlanamaz” olan,
- öznesi “kendi öznesi olduğu zamanda kanıtlanamaz” ifadesi olan cümle; ama bu cümle, yanlış olarak varsaydığımız C cümlesidir. C kanıtlanabildiğinden, C doğru olmalıdır. Kısaca C yanlış ise doğrudur.

Böylece C doğrudur. O zaman C cümlesine göre bir cümle kanıtlanamaz. Aslında doğruluğunu gösterdiğimiz C cümlesi kanıtlanamaz.

- **Paradoks 2.** Doğru ama kanıtlanamaz cümle vardır.
- C cümlesinin doğruluğunu kanıtlamadık mı? Kanıtladık, ama yeni kanıt kavramı ile kanıtladık.
- Russell & Whitehead 1908–13 yazdığı Principia Mathematica kitabından bir PM “kanıt dizgesi” veya “biçimsel dizge” çıkar.
- **Teorem 1** (Gödel’in Eksiklik Teoremi, 1930 [3]).
- PM dizgesinde
- “Kendi öznesi olduğu zaman PM’de kanıtlanamaz” kendi öznesi olduğu zaman PM’de kanıtlanamaz
- cümlesi oluşturulabilir, ve bu cümle doğrudur, ama PM’de kanıtlanamaz. PM’nin yerine başka biçimsel dizgeler konulabilir. Russell & Whitehead, Principia Mathematica kitabını başka bir paradoksu çözmek için yazmışlardı.

KATALOG PARADOKSU:

- Her katalog, bir kitap olarak sayılsın. Bazı kataloglar, kitap katalogudur. Bir katalog, kendisini içerebilir, kendisini içermeyebilir.
- **Paradoks 3.** Bütün kendisini içermeyen kataloglar, bir katalog oluşturamaz.

RUSSELL PARADOKSU (BERTRAND RUSSELL, 1872–1970):

- Bertrand Russell, aşağıdaki paradoksu 1902’de Gottlob Frege’ye gönderdi. Zaten önceki yılda Ernst Zermelo benzer paradoksu bulmuştu.
- “Kendi yüklem olamaz” bir yüklem olabilir mi?
- “Üç sözcüklüdür” kendi yüklem olamaz cümlesi doğrudur, çünkü “Üç sözcüklüdür” üç sözcüklüdür cümlesi yanlıştır. Böylece “kendi yüklem olamaz” öbeği, bir yüklem olarak kullanılabilir. Ama gerçek bir yüklem ise, “Kendi yüklem olamaz” kendi yüklem olamaz cümlesi oluşturulabilir, ve bu cümle ne doğru ne yanlıştır.
- **Paradoks 4.** “Kendi yüklem olamaz” bir yüklem olamaz.

- Farklı şekilde, matematik nesneler küme olarak, ve ayrıca öğeleri küme olan küme olarak, düşünülebilir. Örneğin

$$0 = \emptyset, \quad 1 = \{0\}, \quad 2 = \{0, 1\}, \quad 3 = \{0, 1, 2\}, \dots$$

- Her x bir küme olsun. Eğer φ bir yüklem ise, o zaman

$$\{x: \varphi(x)\}$$

topluluğu oluşturulabilir. Mesela

$$\{x: x \notin x\}$$

- topluluğu oluşturulabilir. Ama bu topluluk, bir küme olamaz, çünkü bir a kümesiye, o zaman

$$a \in a \iff a \notin a.$$

- Paradoks 5.** Öğeleri küme olan bazı topluluklar, küme değildir.

- Bir $\{x: \varphi(x)\}$ topluluğuna **sınıf** denir. Her a kümesi $\{x: x \in a\}$ sınıfıdır, ama gösterdiğimiz gibi küme olmayan sınıf vardır. **Teorem 2.** Bir B iki konumlu bağıntısı için, öyle bir a olamaz ki her x için

$$x B a \iff \neg(x B x).$$

Kanıt. $x = a$ olsun.

- Örneğin $x B y$ aşağıdaki gibi olabilir:

- x 'in saçları y tarafından kesilir,
- x, y tarafından içerilir,
- " x " y cümlesi doğrudur,
- $x \in y$.

CANTOR PARADOKSU (GEORG CANTOR, 1845–1918)

- $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ olsun.
- **Teorem 3.** ω 'nın her n elemanı için $n < 2^n$.

Kanıt. Tümevarımı kullanacağız.

1. $0 < 1 = 2^0$.

2. $m \in \omega$ ve $m < 2^m$ varsayalım. O zaman $1 \leq 2^m$, dolayısıyla

$$m + 1 \leq 2^m + 2^m = 2^m \cdot 2 = 2^{m+1}.$$

Alternatif kanıt. Eğer $|A| = n$ ise, o zaman $|P(A)| = 2^n$. Ancak

$$|A| < |P(A)|.$$

Zira $|A| \leq |P(A)|$, çünkü $b \in A$ ise $\{b\} \in P(A)$. A kümesinin her b elemanı için, A kümesinin farklı $F(b)$ alt kümesi olsun. (Böylece F , A kümesinden $P(A)$ kümesine giden birebir bir fonksiyondur.)

$$C = \{x \in A : x \notin F(x)\}$$

olsun. O zaman A kümesinin her b elemanı için

$$b \in C \iff b \notin F(b).$$

O halde

$$C \neq F(b).$$

(Yukarıdaki teoremden $x \in F(y)$ için $x \in F(y)$ olsun.)

Paradoks 6. $|A| < |P(A)|$ eşitsizliği, sonsuz kümeler için bile doğrudur. Böylece en büyük küme yoktur.

GÖDEL'İN EKSİKLİK TEOREMİ (KURT GÖDEL, 1906–78):

- Gödel'in gösterdiğine göre kanıtlanabilme, bir cümlelerin geometrik özelliğidir. Zira bir biçimsel kanıt, sadece bir cümle listesi ki her cümle, önce gelen cümlelerden kesin kurallara göre çıkar.
- Böylece öyle bir $\psi(x, y)$ formülü vardır ki her σ cümlesi için σ kanıtlanabilir ancak ve ancak $\exists y \psi(p\sigma q, y)$.
- Şimdi $\theta(x)$, $\neg \exists y \psi(x, y)$ formülü olsun. O zaman her σ cümlesi için $\theta(p\sigma q)$ doğrudur ancak ve ancak σ kanıtlanamaz.
- Öyleyse her $\varphi(x)$ formülü için $\theta * (p\varphi(x)q)$ doğrudur ancak ve ancak $\varphi(p\varphi(x)q)$ kanıtlanamaz. Öyleyse $\theta * (x)$ formülü kendi öznesi olduğu zaman kanıtlanamaz yüklemi anlamına gelir. Gördüğümüz gibi bu yüklem öznesi $p\theta * (x)q$ ifadesi ise, doğru ama kanıtlanamayan cümle çıkar.
- **Paradoks 7.** Doğru ama kanıtlanamaz cümle vardır.

2+2=5 ğ?

- **X = Y**olsun
 $X^2 = X.Y$eşitliğin her iki tarafını '**X**' ile çarptık.
 $X^2 - Y^2 = XY - Y^2$her iki taraftan '**Y²**' çıkardık.
 $(X + Y).(X - Y) = Y.(X - Y)$sol tarafı çarpanlara ayırdık, sağ tarafı '**Y**' parantezine aldık.
 $(X + Y) = Y$(**X - Y**)'ler sadeleşti.
 $X + X = X$**X = Y** olduğundan,
 $2.X = X$'**X**' leri topladık.
 $2 = 1$ '**X**' ler sadeleşti.
 $3 + 2 = 1 + 3$her iki tarafa '**3**' ilâve ettik.
 $5 = 4$buradan,
 $5 = 2 + 2$'**4**'ü, '**2+2**' şeklinde yazdık. HATA NEREDE?

KARIŞIM PARADOKSU:

• Bir fincan sütümüz ve bir fincan da kahvemiz var. Bir kaşık süttten alıyoruz ve kahve fincanına döküyoruz. İyice karıştırıp oradan da bir kaşık alıyoruz ve süte döküyoruz. Şimdi sorumuz geliyor:

- **Kahvedeki süt mü yoksa sütteki kahve mi daha fazladır?**
- Cevap şaşırtıcı gelebilir ama karışım oranları eşittir. İşte ispatı:
- Kabul edelim ki karışımımız homojen olmasın. Meselâ kahveye kattığımız süt, tamamen dibe çöksün. Kahveden aldığımız miktar tabi ki süttten aldığımıza eşit olacaktır. Veya:
- İlk karışımdan sonra kaşığımızın yarısı süt, yarısı da kahve olsun. Bu sefer yine sütte yarım kaşık kahve, kahvede yarım kaşık süt bulunacaktır. Veya:
- İlk karışım homojen olsun. Aldığımız bir kaşık karışımın % 90 ını kahve, % 10 unu süt kabul edelim. Sütün % 90 ı kahvede kalmıştır. Sonuçta eksilen sütün yerini kahve dolduracağından karışım oranları eşit olur.

BÜTÜN SAYILAR EŞİTTİR PARADOKSU:

- **a** ve **b** birbirinden farklı herhangi iki tamsayı ve **c** de bunların farkı olsun:

- **a-b=c**

(a-b)(a-b)=c.(a-b).....her iki tarafı (a-b) ile çarptık.

$a^2-2ab+b^2=ac-bc$parantezleri açtık.

$a^2-2ab+b^2-ac=-bc$ac yi sol tarafa attık.

$a^2-2ab-ac=-bc-b^2$ b^2 yi sağ tarafa attık.

$a^2-ab-ac=ab-bc-b^2$2ab nin birini sağ tarafa geçirdik.

$a(a-b-c)=b(a-b-c)$a ve b parantezine aldık.

$a=b$(a-b-c) ler sadeleşti. (2+2=5

Paradoksunun benzeri)

KARIŞIK BİR HESAP:

- İki çocuk ayrı ayrı kalem satmaktadırlar. Her ikisinin de 30'ar tane kalemi vardır. Biri, **3** kalemi **10** TL'ye; diğeri de **2** kalemi **10** TL'ye vermektedir. İlki 30 kalemde 100 TL, diğeri de 150 TL kazanır. (Toplam 250 TL.) Ertesi gün yine 30'ar kalemle evlerinden çıkarlar. Yolda karşılaştıklarında biri diğeri der ki:
 - -"Gel seninle ortak olalım. **60** (30+30) kalemin **5** (2+3) tanesini **20** (10+10)TL'ye satalım. Kazandığımız parayı da paylaşıyoruz. Basit bir hespla 60 kalemde 240 TL kazanırlar. Yani:
 - **5 Kalem.....20 TL ise**
60 Kalem.....x TL'dir. Buradan;
 - **$x = (60 \cdot 20) / 5 = 240$ TL**
 - Çocuklar, ayrı ayrı satış yaptıklarında toplam 250 TL kazanıyorlardı. Beraber sattıklarında neden 10 TL zarar ettiler?

1 KG = 1 TON ğ?

•1 kg = 1 ton ğ?

- 1 kg = 1000 gr.....(1)
2 kg = 2000 gr.....(2)
- (1) ve (2) ğarpılırsa:
- 2 kg = 2.000.000 gr
2 kg = 2.000 kg.....(2.000.000 gr = 2.000 kg)
2 kg = 2 ton.....(2.000 kg = 2 ton). Dolayısı ile,
1 kg = 1 ton

BERBER PARADOKSU:

- Bir berber, bulunduğu köydeki erkeklerden, yalnızca **kendi kendini traş edemeyen** erkekleri traş ediyor. Berberi kim traş edecek?
Kendi kendine traş olsa; kendisini traş edebildiği için tanıma ters düşecek. Başkası traş etse; o kişi kendi kendine de traş olabiliyor demektir.

HEMPEL PARADOKSU:

- Carl Hempel'e göre "**Bütün kuzgunlar siyahtır!**"
- Bu önermeyi iki şekilde ispatlayabiliriz:
- a) Çok sayıda kuzgun görüp, hepsinin de siyah olduğunu tesbit ederek,
b) Siyah olmayan şeylerin, aynı zamanda kuzgun da olmadığını görerek.
- Bilinen şu ki çok sayıda siyah kuzgun ve yine çok sayıda siyah olmayan, aynı zamanda kuzgun da olmayan cisim vardır. Siyah olmayan tüm cisimler incelenmeden bu fikre varamayız. Kırmızı cisimler için bu uygulama yapılmamışsa "bazı kuzgunlar kırmızı " da olabilir. Bu sebeplerden Hempel paradoksu, "Tümevarım" ın itibarını sarsmıştır.

ARNAULD PARADOKSU:

- Herkes bilir ki;
- $(\text{Büyük Sayı} / \text{Küçük Sayı}) \neq (\text{Küçük Sayı} / \text{Büyük Sayı})$ dır.
 $(5 / 2) \neq (2 / 5)$ gibi
- Ancak negatif sayılar bu kuralı bozar:
 $(3 / -3) = (-3 / 3)$
- Ayrıca;
- $(\text{Büyük Sayı} / \text{Küçük Sayı}) > 1$ dir.
 $(4 / 3) > 1$ gibi
- Yine negatif sayılar için kural ihlâl edilir:
 $(3 / -1) < 1$
- Bu durum, matematikçi Arnauld'a mantıksız geldiği için negatif sayıların olmadığına hükmetti.

GALİLEO PARADOKSU:

Sonsuzlukla ilgili bir paradoks:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	n	...	∞
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	...	$2n$	...	∞
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	...	n^2	...	∞

Yukarıda ilk sırada pozitif tamsayılar, altında iki katları, en altta da kareleri var. İlk seri sonsuz olduğuna göre diğer seriler de sonsuz elemanlı. Ayrıca ilave olarak sayıların küplerini, üç katlarını, on katlarını, yarılarını, üçtebirlerini de yazabiliriz. Hiçbir sonsuz da birbirine eşit değil.

EUPLİDES (KUM YIĞINI) PARADOKSU:

- Euplides, hiçbir zaman bir "kum yığını" oluşturulamayacağını iddia etmiştir. Çünkü bir kum tanesi, "yığın" değildir. Yanına bir tane daha koyarsak yine yığın oluşmaz. "Kum yığını" olmayan bir şeyin yanına (veya üzerine) kum tanesi koymakla yığın elde edemeyeceğimize göre Hiçbir zaman "kum yığını" oluşturamayız.

- Daha açık bir deyişle:

Kabul edelim ki birer birer kum tanelerini biraraya getirelim. Hangi merhaleden sonra kumlar "yığın" oluşturur? Diyelim ki 'bir milyon' adet kum tanesi, bir yığın oluştursun. Dokuzyüz doksandokuzbin dokuzyüz doksandokuzu "kum yığını" kabul edilmeyecek mi? Edersek "1" eksiği de yığın olmaz mı? Yani hangi aşama bizim için "yığın" anlamına gelir?

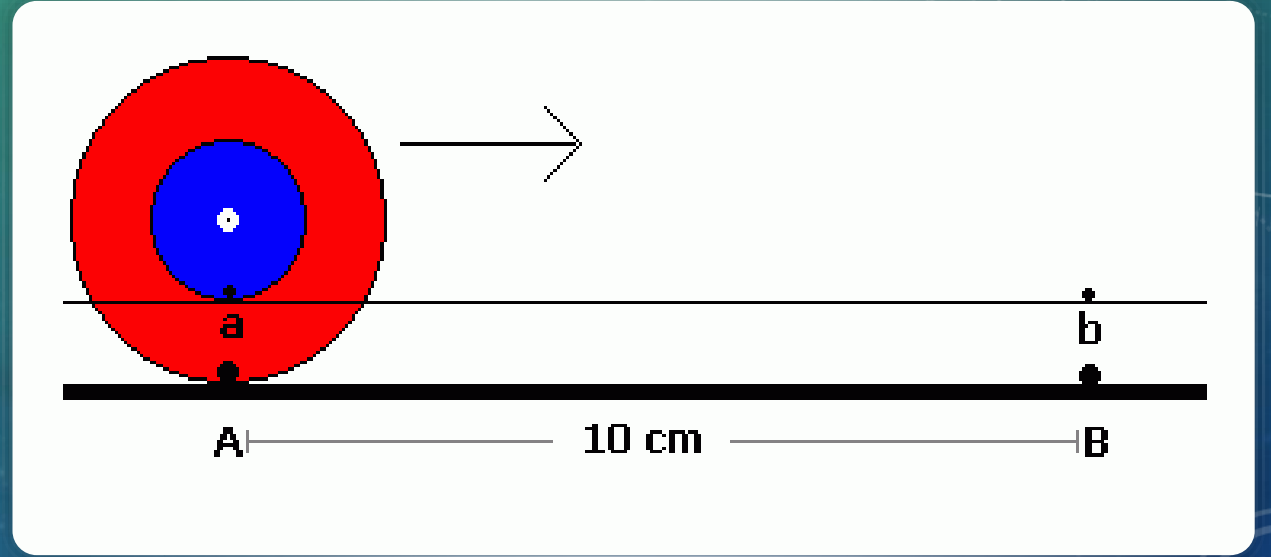
-1=1 ¿?

$$\begin{aligned} -1 &= (\sqrt{-1})^2 \\ -1 &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \\ -1 &= \sqrt{(-1) \cdot (-1)} \\ -1 &= \sqrt{1} \\ -1 &\stackrel{?}{=} 1 \end{aligned}$$

TEKERLEK

PARADOKSU(ARİSTO'DAN):

- Şekilde birbirine yapışık, ortak merkezli iki tekerlek görülüyor. Kabul edelim ki büyük tekerleğin çevresi 10 cm, küçük tekerleğin çevresi de 5 cm olsun. Tekerlekler kendi etrafında sağ tarafa doğru bir tur döndüklerinde B (b) noktasına geliyorlar. Nasıl oluyor da büyük tekerlek 10 cm gittiğinde, küçük tekerlek te 10 cm gitmiş oluyor? Halbuki o da bir tur döndü ve çevresi 5 cm?
- **Cevap:** Aristo'ya göre, küçük tekerleğin her noktasına karşılık büyük tekerlekte bir nokta vardır. Dolayısı ile ikisi birbirine eşit olmalıdır. Ancak tabi ki işin aslı şudur:
- **Büyük tekerlek dönerken küçük tekerlek te kendi yolunda kayarak hareket etmektedir.**



ÜÇGENLER:

•**Soru:** Bir üçgenin içaçıları toplamı gerçekten 180° midir?

• Bu sorunun cevabını vermeden önce başka bir soru soralım:

Bir avcı, bulunduğu yerden 1 kilometre güneye gidiyor. Sonra dik açı ile (90°) doğuya dönüp 1 kilometre daha gidiyor. Sonra yine dik açı ile kuzeye doğru dönüp 1 kilometre daha gidiyor. Avcı o noktada, başladığı yere geldiğini fark ediyor. Avcının avı nedir?

• Öncelikle böyle birşey mümkün olabilir mi? Tabi ki . Eğer avcı kuzey kutbunda ise olur (veya güney kutbu). Dünya yuvarlak olduğuna göre mümkündür. Şimdi de avcının izlediği yolu düşünelim: Avcı doğrusal hareket yaptığına göre katettiği yol tam bir üçgendir. Bu üçgenin açıları toplamı ise doğal olarak 180° den büyüktür.

Açıklama: İki kere dönüş yaparak $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, bir de kutupta başlangıç ve varış arasında x° açısı var.

• **$180^\circ + x^\circ > 180^\circ$** (x° sıfırdan büyük)

• Sorumuzun cevabına gelince: Demek ki dünya yüzeyinde içaçıları toplamı 180° olan bir üçgen çizilemez. Çünkü bir kağıda çizilen üçgen bile mutlaka 180° den büyüktür.(Burada x° çok çok çok küçüktür)

• Bu arada avcının avı :Kutup ayısı veya kutupta yaşayan başka bir hayvan.



ÖĞRENCİNİN:
ADI: ŞEYMANUR
SOYADI: UZUN
SINIFI: 11-C
NO: 282

ÖĞRETMENİN:
ADI: CUMHUR
SOYADI: ÖZGÜR
BRANŞI: MATEMATİK

KONU: PARADOKSLAR